Op 13 maart 2015 vindt de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Op verschillende plaatsen in het land buigen zich die dag zo'n duizend leerlingen over de opgaven van deze wedstrijd. In dit artikel bespreken we opgave C2 van vorig jaar, over zogeheten 'jackpotgetallen'.

■ door Merlijn Staps

JACKPOTGETALLEN

Van jackpotgetallen heb je waarschijnlijk nog nooit eerder gehoord, tenzij je vorig jaar de tweede ronde van de Wiskunde Olympiade hebt gehaald. Daarin onderscheidt de olympiade zich van de wiskunde die je op school doet: de dingen die je dan op een toets tegenkomt, zie je (als het goed is althans) niet voor het eerst. Bij de olympiade is dat anders. Bekijk de volgende opgave maar eens:

Opgave C2 (Nederlandse Wiskunde Olympiade, tweede ronde 2014)
We noemen een positief geheel getal n een *jackpotgetal* als het de volgende eigenschap heeft: er bestaat een positief geheel getal k met minstens twee cijfers waarvan alle cijfers hetzelfde zijn (zoals 11111 of 888) en waarvoor $n \cdot k$ weer een getal is waarvan alle cijfers hetzelfde zijn.
Zo is 3 een jackpotgetal, want $3 \cdot 222 = 666$.
(a) Bepaal een jackpotgetal van 10 cijfers en laat zien dat het inderdaad een jackpotgetal is.
(b) Laat zien dat 11 geen jackpotgetal is.
(c) Bepaal of 143 een jackpotgetal is en onderbouw je antwoord met een bewijs.

Je ziet: we moeten drie vragen over jackpotgetallen beantwoorden. Behalve de definitie weten we alleen dat 3 een jackpotgetal is, omdat $3 \cdot 222 = 666$ en 666 net als 222 een getal met allemaal gelijke cijfers is. Net zo zijn 1, 2 en 4 ook jackpotgetallen, want als we die getallen met 222 vermenigvuldigen krijgen we achtereenvolgens 222, 444 en 888, ook allemaal getallen met gelijke cijfers. En ook de getallen 5 tot en met 9 zijn jackpotgetallen, want die kunnen we met 111 vermenigvuldigen.

We zien dus dat in elk geval alle getallen van één cijfer jackpotgetallen zijn. Kunnen we er nog meer vinden? Het getal 10 blijkt geen jackpotgetal te zijn: een getal met 10 vermenigvuldigen komt overeen met een 0 aan het einde plaatsen; bij een positief getal levert dat dus nooit een getal met allemaal gelijke cijfers op. Bij (b) moeten we bewijzen dat 11 ook geen jackpotgetal is, maar laten we eerst proberen om nog wat meer jackpotgetallen te vinden.

We hebben hierboven de kleinste waarden voor n onderzocht (namelijk alle $n \leq 10$); datzelfde kunnen we met k proberen. De kleinst mogelijke waarde voor k is 11. Met welke n kunnen we 11 vermenigvuldigen zodat we weer een getal met enkel dezelfde cijfers krijgen? Uiteraard werken hier weer $1 \leq n \leq 9$, maar zijn er nog meer? Na enig proberen vind je misschien dat we $n = 101$ kunnen kiezen: immers, $101 \cdot 11 = 1111$. Ook 101 is dus een jackpotgetal en om vergelijkbare reden geldt dat ook voor 202, 303, ..., 909.

Nu hebben we al met al 18 jackpotgetallen gevonden en hebben we een beetje gevoel voor de definitie ervan. Tijd om ons over de gestelde vragen te buigen. De eerste taak is om een groot jackpotgetal te vinden, namelijk één met 10 cijfers. Ons huidige record is 3 cijfers, maar dat kunnen we gemakkelijk verbeteren: net zoals 101 een jackpotgetal is, is 1001 er ook één: we hebben bijvoorbeeld $1001 \cdot 444 = 444\,444$. Op deze manier kunnen we ook een jackpotgetal met 10 cijfers vinden:

$$1\underbrace{00000000}_{\text{8 nullen}}1$$

is een jackpotgetal, want

$$1000000001 \cdot \underbrace{444444444}_{\text{9 vieren}} = \underbrace{444\ldots44}_{\text{18 vieren}}.$$

Hiermee is deel (a) opgelost. Overigens is ons voorbeeld niet de enige mogelijkheid: 3003003003 werkt bijvoorbeeld ook, want $3003003003 \cdot 222$ is een getal dat bestaat uit 12 zessen. Met behulp van een computer zijn nog exotischere voorbeelden te vinden: 1285714287 is ook een jackpotgetal van 10 cijfers. Je mag zelf proberen de bijbehorende k te vinden.

11 IS GEEN JACKPOTGETAL Bij deel (b) moeten we bewijzen dat 11 juist geen jackpotgetal is. Dit is moeilijker dan bewijzen dat een getal n wél een jackpotgetal is, want daarvoor hoeven we enkel de bijbehorende k te geven. Nu moeten we laten zien dat welk getal k met allemaal dezelfde cijfers we ook kiezen, $11k$ nooit allemaal dezelfde cijfers heeft. We kunnen een aantal voorbeelden proberen: $11 \cdot 222 = 2442$, $11 \cdot 77 = 847$, $11 \cdot 555 = 6105$... Inderdaad telkens geen getal met alleen dezelfde

cijfers. Omdat we dit voor iedere mogelijke k moeten bewijzen, noemen we het enige cijfer dat in k voorkomt a en schrijven we $k = aa...a$, waarbij het aantal cijfers a onbekend is (maar wel minstens 2). Kunnen we nu iets zeggen over de cijfers van $11 \cdot (aa...a)$? De truc is om dit te schrijven als $10(aa...a) + (aa...a)$. Dan krijgen we de volgende optelling:

$$\begin{array}{r} aaa\ldots aa0 \\ \underline{+\ aa\ldots aaa} \\ ?????????? \end{array}$$

We zien dat het laatste cijfer van $11(aa...a)$ een a moet zijn. Als $11(aa...a)$ allemaal dezelfde cijfers zou hebben, moeten dat dus allemaal a's zijn. In het bijzonder moet het op-een-na-laatste cijfer (horende bij de tientallen) gelijk zijn aan a. Omdat de bijbehorende cijfers van $(aa...a)$ en $10(aa...a)$ allebei a's zijn (het aantal cijfers was immers minstens 2), is het cijfer van de tientallen ofwel gelijk aan $2a$, dan wel gelijk aan $2a - 10$. Omdat $a > 0$, kan $2a$ niet gelijk zijn aan a, en omdat $a < 10$, kan $2a - 10$ ook niet gelijk zijn aan a. Het op-een-na-laatste cijfer van $11(aa...a)$ kan dus geen a zijn, en $11(aa...a)$ is dus nooit een getal met allemaal dezelfde cijfers (want de laatste twee cijfers kunnen al niet hetzelfde zijn). Om deze reden is 11 geen jackpotgetal.

IS 143 EEN JACKPOTGETAL? Alleen deel (c) resteert nog: is 143 een jackpotgetal? Het antwoord blijkt ja te zijn: er geldt $143 \cdot 777 = 111111$. Maar hoe hadden we dat nu kunnen bedenken? Simpelweg waarden voor k proberen lijkt niet het slimste om te doen – hoewel we ook op die manier, wanneer we bij $k = 11$ beginnen, na 16 pogingen de juiste k hebben gevonden.

Laten we eens kijken uit wat voor cijfers het getal k bestaat. Als we 143 zouden vermenigvuldigen met een getal k dat uit enkel enen bestaat, krijgen we een getal dat eindigt op de cijfers 73. Dit is zo omdat $43 \cdot 11 = 473$; als k uit meer dan twee enen bestaat heeft dit geen invloed op de laatste twee cijfers. Dit levert dus nooit een geschikte waarde voor k. Op deze manier kunnen we ook het cijfer 2 uitsluiten, want $43 \cdot 22 = 946$ eindigt op twee verschillende cijfers. We hadden dit ook zo kunnen beredeneren: omdat $43 \cdot 11$ eindigt op de cijfers 73, eindigt $43 \cdot 22$ op de laatste twee cijfers van $73 \cdot 2 = 146$, oftewel op een 4 en een 6. Omdat $3 \cdot 73 = 219$, $4 \cdot 73 = 292$, $5 \cdot 73 = 365$, $6 \cdot 73 = 438$, $7 \cdot 73 = 511$, $8 \cdot 73 = 584$ en $9 \cdot 73 = 657$, is 7 het enige mogelijke cijfer voor k. We proberen nu $143 \cdot 77 = 11011$ en $143 \cdot 777 = 111111$ om bovenstaande oplossing te vinden. Overigens blijkt dit ook de *enige* oplossing te zijn: als we 143 met een getal van minstens vier zevens vermenigvuldigen, eindigt het resultaat op de cijfers 2111, en krijgen we dus nooit een getal met allemaal dezelfde cijfers. ■